Stationarity

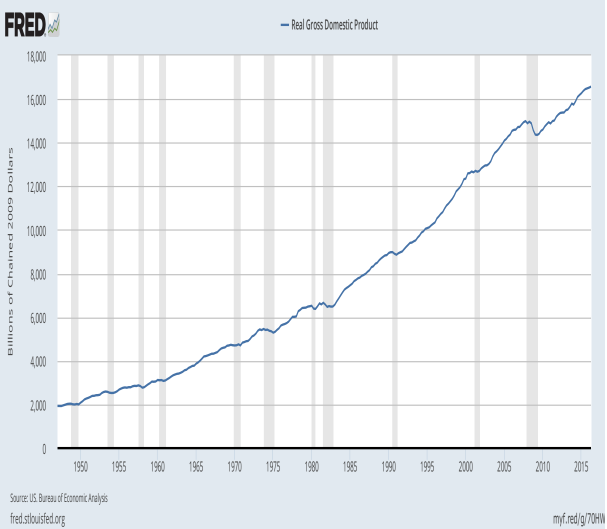
Laurent Ferrara

Master 2 EIMPC
Université Paris Nanterre

Overview

1. Introduction
2. Tests
3. Application to US GDP

PIB US : 1950 - 2015



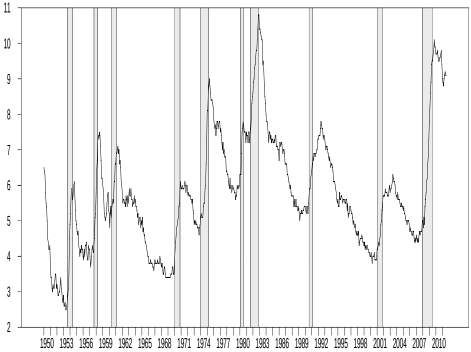
Long-term growth

3 factors are responsible for this long-term growth

1. Increase of the population : more people can produce a greater quantity of goods and services
2. Stock of equipment and facilities has increased overtime
3. Techniques of production have led to increases in the productivity

Long-term growth

In spite of this long-term growth, evidence on periods with negative growth rates = economic recessions. This corresponds to business cycles.
Not related to long-term factors.
Clearly visible on unemployment rate, with asymmetric behaviour.
Is this series stationary ?


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1950
1953
1956
1959
1962
1965
1968
1971
1974
1977
1980
1983
1986
1989
1992
1995
1998
2001
2004
2007
2010

Difference Stationary vs Trend Stationary

We assume the standard decomposition of s.a. macro time series:

$$Y_t = T_t + C_t + e_t,$$

T_t = trend,
C_t = cycle.
2 types of non-stationarity: DS vs TS

Dickey-Fuller tests

Test basé sur la régression linéaire:

$$\Delta X_t = C + \delta t + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta X_{t-i} + u_t, \tag{1}$$

où C est une constante et $(u_t)_t$ est un bruit blanc faible.
La constante C et la tendance linéaire δt peuvent être inclues ou non dans la régression, donnant ainsi trois types de test possibles.
L'hypothèse nulle $H_0 : \rho = 0$ est ainsi testée à l'aide de la statistique de Student suivante : $\hat{\rho}/\sqrt{Var(\hat{\rho})}$. Les valeurs critiques usuelles ne sont pas valides dans ce type ce test. Les valeurs critiques à utiliser dans chacun des trois cas possibles ont été tabulées par Dickey et Fuller.

Dickey-Fuller tests

Application to GDP series

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: pib.ts
Dickey-Fuller = -1.6959, Lag order = 6, p-value = 0.7041

alternative hypothesis: stationary
```

Dickey-Fuller tests

On observe ainsi que l'hypothèse nulle de non-stationarité de la série est acceptée par le test. Nous pouvons étendre ce résultat à d'autres spécifications du test. Par exemple, l'option `k=` permet de choisir le nombre p de retards à inclure dans la régression.

Dickey-Fuller tests

Il reste donc à vérifier que la série différenciée du taux de croissance annuel est bien stationnaire.

```
> adf.test(dpib.ts)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: dpib.ts
Dickey-Fuller = -5.7939, Lag order = 6, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Ainsi, on accepte bien la stationnarité de la série du taux de croissance du PIB. On pourra donc proposer un processus pour cette série.

Phillips-Perron tests

Ce test permet de tester l'hypothèse nulle de stationnarité à partir de la statistique suivante:

$$\nu = \frac{1}{n^2 s^2(l)} \sum_{t=1}^{T} S_t^2, \tag{2}$$

où $s^2(l)$ est la variance de long terme de la série $(\hat{e}_t)_t$, cette série étant le résidu de la régression suivante:

$$X_t = \tau + \delta t + e_t,$$

et où S_t est la somme partielle de ces résidus estimée par $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i$.

Phillips-Perron tests

Phillips et Perron (1988) proposent d'estimer la variance de long terme de la manière suivante :

$$\hat{s}^2(l) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2 + \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{l}\omega(j,l)\sum_{t=j+1}^{n}\hat{e}_t\hat{e}_{t-j}, \tag{3}$$

où les poids sont en général donnés par l'égalité suivante (voir Newey and West (1994)):

$$\omega(j,l) = 1 - \frac{j}{l+1}. \tag{4}$$

Les valeurs critiques à utiliser ont été tabulées par Phillips et Perron.

Phillips-Perron tests

```
> pp.test(pib.ts)
Phillips-Perron Unit Root Test
data: pib.ts
Dickey-Fuller Z(alpha) = -2.8078, Truncation lag parameter = 5, p-value
= 0.9425
alternative hypothesis: stationary
```

Le test de PP confirme la non-stationnarité de la série même en prenant un risque α très élevé (p-value de 0.9425). De manière similaire à précédemment, le test accepte l'hypothèse de stationnarité de la série du taux de croissance mensuel.

Remarque

Il est à souligner que ces tests de stationnarité sont peu puissants en particulier contre l'alternative de stationnarité avec longue mémoire. En effet, dans le cas d'une forte persistence dans une série stationnaire, les tests de racine unitaire auront tendance a rejeter à tort la stationnarité. Ce résultat aura donc tendance à entraîner une sur-différenciation de la série (on différencie une série déjà stationnaire), donc une perte d'information dommageable pour le modélisateur.

Modèles ARIMA

Definition

Un processus du second ordre $(X_t)_{t \in Z}$ est défini comme étant un processus
ARIMA(p, d, q), si le processus $((I - B)^d X_t)_{t \in Z}$ est un processus ARMA.

Modèles SARIMA

Definition

Un processus du second ordre $(X_t)_{t \in Z}$ est défini comme étant un processus
SARIMA$(p, d, q)(P, D, Q)_S$, si et seulement si, pour tout $t \in Z$, il vérifie l'équation aux différences suivante :

$$\phi(B)\Phi(B^S)(I - B)^d(I - B^S)^D(X_t - \mu) = \theta(B)\Theta(B^S)\varepsilon_t, \quad (5)$$

où S est la saisonnalité du processus, où d et D sont deux entiers correspondant respectivement aux ordres de différentiation et de différentiation saisonnière, où $\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \ldots - \Phi_P z^P$ et $\Theta(z) = I - \Theta_1 z - \ldots - \Theta_Q z^Q$ sont deux polynômes, et où μ, $\phi(z)$, $\theta(z)$ et $(\varepsilon_t)_{t \in Z}$ sont définis dans la définition des processus ARMA.

Choix de l'entier d

Si la trajectoire observée est issue d'un processus faiblement stationnaire, alors on dira alors que le processus $(X_t)_{t \in Z}$ est intégré d'ordre 0; sinon, on suppose qu'il existe un entier $d > 0$ tel que $(I - B)^d X_t$ est asymptotiquement faiblement stationnaire, B étant l'opérateur retard. On dira alors que le processus $(X_t)_{t \in Z}$ est intégré d'ordre d. Cependant, dans la majorité des cas rencontrés en pratique l'entier d correspondant à l'ordre d'intégration est égal à l'unité. Ainsi, le problème du modélisateur revient alors à se demander quel est l'ordre d'intégration du processus, ce qui est équivalent à tester l'hypothèse $H_0 : \{d = 0\}$ contre l'hypothèse $H_1 : \{d = 1\}$.